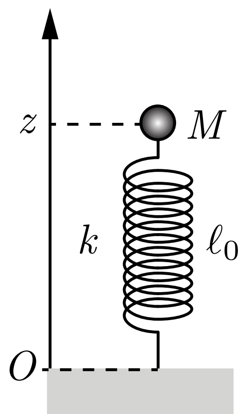
Série 4 - Oscillateur harmonique

1 Suspension d'une voiture

Objectif : Modélisation d'un mouvement harmonique oscillatoire vertical.

Théorie : 4.1 Oscillateur harmonique ; A.4.2 Oscillateur harmonique vertical.

On désire construire une voiture dont la suspension a une période d'oscillation à laquelle l'organisme est habitué, soit $T = 0.8$ s. On modélise la voiture et sa suspension par une masse $M = 1500$ kg supportée par un ressort unique de constante élastique k et de longueur au repos ℓ_0.



(a) Déterminer la valeur de la constante élastique k du ressort.

(b) Calculer l'abaissement Δz de la voiture lorsqu'on y introduit une malle de masse $m = 70$ kg.

(c) Expliquer pourquoi un camion, qui doit transporter des charges très lourdes, ne peut pas être confortable à vide.

2 Oscillateur sur plan incliné

Objectif : Modélisation d'un mouvement harmonique oscillatoire oblique.

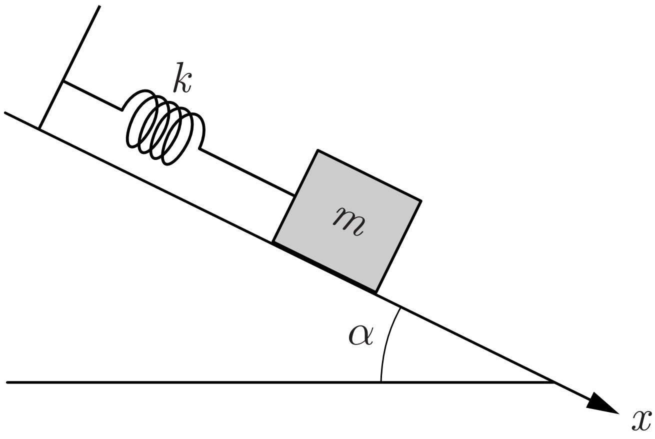
Théorie : 4.1 Oscillateur harmonique ; A.4.2 Oscillateur harmonique vertical.

Un point matériel de masse m, est astreint à se déplacer sur une droite inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il n'y a pas de frottement. Le point matériel est retenu par un ressort de longueur au repos ℓ_0 et de constante élastique k.

(a) Etablir le bilan des forces.

(b) Déterminer la position d'équilibre x_0.

(c) Déterminer l'équation horaire mouvement horizontal $x(t)$, compte tenu des conditions initiales sur la position $x(0) = 2\ell_0 + \frac{g}{\omega^2}\sin\alpha$ et sur la vitesse $\dot{x}(0) = 0$, et l'écrire en termes de la pulsation ω.

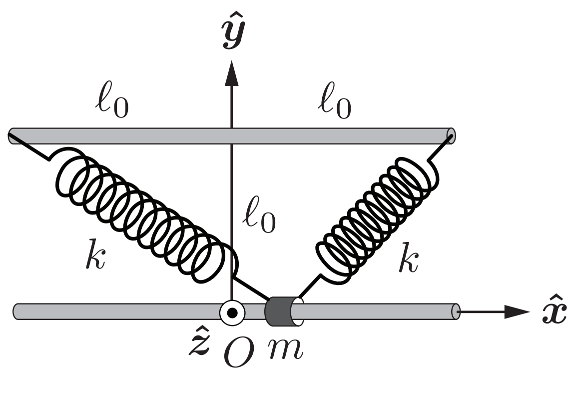


3 Système de ressorts

Objectif : Modélisation d'un système de deux oscillateurs harmoniques.

Théorie : 4.1 Oscillateur harmonique ; A.4.3 Oscillateur à double ressort.

Un point matériel de masse m est astreint à se déplacer le long d'une barre horizontale de longueur $2\,\ell_0$ disposée le long de l'axe Ox. Deux ressorts identiques de constante élastique k et de longueur à vide $\sqrt{2}\,\ell_0$ sont attaché au point matériel. Les deux autres extrémités des ressort sont fixées sur une barre horizontale parallèle à la première située à une distance ℓ_0 de celle-ci dans le plan horizontal Oxy. Leurs vecteurs positions sont $\boldsymbol{r}_1 = \ell_0\,\hat{\boldsymbol{x}} + \ell_0\,\hat{\boldsymbol{y}}$ et $\boldsymbol{r}_2 = -\,\ell_0\,\hat{\boldsymbol{x}} + \ell_0\,\hat{\boldsymbol{y}}$. La force de réaction normale de la barre sur le point matériel est $\boldsymbol{N} = N_y\,\hat{\boldsymbol{y}} + N_z\,\hat{\boldsymbol{z}}$.



(a) Dans la limite des petties oscillations, c'est-à-dire $x \ll \ell_0$, exprimer les forces élastiques exercées par les ressorts de droite et de gauche respectivement,

$$\boldsymbol{F}_{e,1} = -\,k\,d_1\,\hat{\boldsymbol{d}}_1 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{F}_{e,2} = -\,k\,d_2\,\hat{\boldsymbol{d}}_2$$

en termes de la coordonnée d'abscisses x et des vecteurs unitaires $\hat{\boldsymbol{x}}$ et $\hat{\boldsymbol{y}}$ à l'aide d'un développement limité au 1^{er} ordre en $\frac{x}{\ell_0}$. Les vecteurs unitaires

$\hat{\boldsymbol{d}}_1$ et $\hat{\boldsymbol{d}}_2$ sont orientés le long des ressorts vers le bas.

(b) Déterminer l'équation du mouvement du point matériel dans la limite des petites oscillations.

(c) Déterminer la position d'équilibre $\boldsymbol{r}_0$ et la pulsation ω du mouvement oscillatoire dans la limite des petites oscillations.

(d) Dans la limite des petites oscillations, déterminer l'équation horaire du mouvement du point matériel, compte tenu des conditions initiales sur la position $x(0) = 0$ et sur la vitesse $\dot{x}(0) = \ell_0\,\omega$, et l'écrire en termes de la pulsation ω.

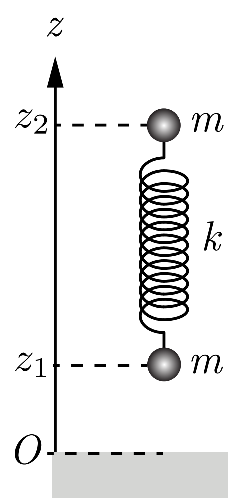
4 Boules attachées par un ressort vertical

⦿ **Objectif** : Système de deux points matériels liés par une force élastique.

📖 **Théorie** : 4.1 Oscillateur harmonique ; 3.2 Balistique sans frottement.

★ **Examen** : Inspiré par un problème d'examen.

Deux boules, considérées comme des points matériels identiques de masse m, sont attachées par un ressort de constante élastique k et de longueur au repos ℓ_0. Les boules sont lâchées sans vitesse initiale l'une en dessus de l'autre. L'origine O est choisie au sol selon l'axe vertical Oz le long duquel se déplacent des deux boules. La coordonnée verticale de la boule inférieure est $z_1(t)$ et la coordonnée verticale de la boule supérieure est $z_2(t)$. La condition initiale sur la position est $z_2(0) = z_1(0) + 2\ell_0$.



(a) Déterminer les équations du mouvement de chaque boule.

(b) Déterminer l'équation horaire du centre de masse du système définie comme,

$$Z_G(t) = \frac{1}{2}\Big(z_1(t) + z_2(t)\Big) \ .$$

(c) Déterminer l'équation horaire de la déformation du ressort définie comme,

$$y(t) = z_2(t) - z_1(t) - \ell_0 \ .$$

(d) En déduire les équations horaires des deux boules $z_1(t)$ et $z_2(t)$.